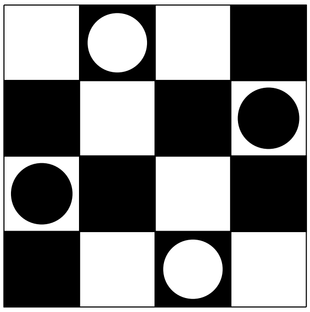
Prolog - TP4
Le problème des n reines

Le problème

Soit n un entier positif non nul. On souhaite disposer n reines sur un damier carré de n cases de côté de manière à ce qu'aucune reine ne puisse en prendre une autre. Une reine peut prendre toute pièce se trouvant sur la même ligne horizontale, verticale ou diagonale qu'elle. Une solution possible avec n = 4 :



Dans ce TP, nous vous proposons d'utiliser le mécanisme de programmation par contraintes de Prolog. (On pourrait résoudre le problème d'une autre manière).

Le codage du plateau

Il existe plusieurs représentation possible du plateau. On pourrait prendre une liste de $n * n$ entiers où chaque entier vaut 1 lorsqu'il y a une reine dans la case correspondante, 0 sinon.

Le damier de l'exemple serait représenté par la liste:

```
[0,1,0,0,
 0,0,0,1,
 1,0,0,0,
 0,0,1,0]
```

Cependant on peut choisir une manière plus compacte de représenter le plateau. On sait qu'il ne peut pas avoir plus d'une reine par ligne et qu'il y a donc exactement une reine par ligne puisqu'il y a n reines et n lignes. On peut donc représenter le plateau par liste de n entiers où chaque entier représente la position de la reine sur la ligne correspondante.

Le plateau de l'exemple est donc codé de la manière suivante : `[2,4,1,3]`

Exercice 1 Problème des n tours

Pour l'instant nous ne considérerons pas le cas de reines sur la même diagonale. Ecrire un prédicat `n_tours(N,Solution)` qui instanciera `Solution` à une liste de n entiers représentant les tours sur le plateau tel qu'aucune d'elles ne soit sur la même ligne.

Indication : le prédicat `length(N,L)` permet de générer une liste de taille N.

Exercice 2 Numérotation des diagonales

Les diagonales du damier peuvent être représentés par des constantes selon le sens de celle-ci:

- diagonale $\diagup$: numéro de ligne + numéro de colonne
- diagonale $\diagdown$: numéro de ligne – numéro de colonne

Par exemple sur un damier avec n = 4 :

Ligne + Colonne

2	3	4	5
3	4	5	6
4	5	6	7
5	6	7	8

Ligne - Colonne

0	1	2	3
-1	0	1	2
-2	-1	0	1
-3	-2	-1	0

Une diagonale est donc caractérisé par une direction et un numéro.

1. Ecrire un prédicat `num_diag(L1,L2)` qui sera appelé avec `L1` instancié à une liste de variables à domaine fini. Ce prédicat est vrai si la liste `L2` représente les numéros de diagonales $\diagup$ sur lesquelles sont les reines sachant que le plateau correspondant est donné par la liste `L1`. S'il est appelé avec `L1 = [A,B,C]` alors `L2` devra être instancié à une liste de variables à domaine fini `L2 = [X,Y,Z]` tel `X = A + 1`, `Y= B + 2` et `Z = C + 3`.
2. Ajouter un argument à ce prédicat pour générer la liste des diagonales $\diagdown$.
   Indication : Prolog ne gère pas les contraintes sur les entiers négatifs. Il faut donc penser à translater le numéro des diagonale $\diagdown$.
3. Compléter le problème des n tours pour résoudre le problème des n reines.

Exercice 3 Elimination des symétries

Il est souvent possible à partir d'une solution d'un problème en trouver d'autres par une transformation assez simple. On dit alors que le problème possède des symétries. On peut donc rajouter des contraintes pour éviter les solutions symétriques et générer si nécessaire les solutions symétriques.

1. Si un damier est solution au problème des n reines alors la symétrie par rapport à un axe horizontal sera lui-aussi une solution. Trouvez une propriété toujours vraie pour un plateau ou son symétrique mais jamais les deux à la fois.

2. Ecrire le nouveau prédicat `n_reines/2` ne générant pas les réponses symétriques par rapport à un axe vertical.
3. Le problème présente aussi une symétrie selon un axe vertical. Ecrivez un nouveau prédicat qui élimine ces solutions symétriques.
   Indication : utiliser l'opérateur de division entière `//`.

Exercice 4 Vérification

Grâce au prédicat `findall/3`, vérifiez le nombre de solutions trouvées par chacune des méthode.

Exercice 5 Et pour aller plus loin

En tournant le plateau de 90° on obtient aussi une nouvelle solution. Ecrire un nouveau prédicat pour résoudre le problème en supprimant cette symétrie.